

МАСЪАЛАИ ОМЕХТАИ КАНОРӢ БАРОИ ЯК МУОДИЛАИ ДИФФЕРЕНЦИАЛӢ БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСИИ ТАРТИБИ ДУОМ БО КОЭФФИЦИЕНТҲОИ ТАҒЙИРӢБАНДА

М. Гадозода, Ҳ.М. Ҳафизов

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ

Дар мавод муодилаи дифференциалӣ бо ҳосилаҳои хусусии дараҷаи дуум бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда бо шартҳои аввала ва канорӣ дар соҳаи маҳкам баррасӣ мегардад. Барои ҳалли муодилаи методи ҷудокунии тағйирёбандаҳо истифода бурда, ҳалли ҷудошаванда дар намуди ҳосили зарби ду функсия пешниҳод мегардад. Пас тағйирёбандаҳо ҷудо намуда, барои яке аз онҳо муодилаи дифференциалии яктағйирёбандаи одии нави Эйлер ва барои функсияи дуум масъалаи канорӣ m -ченака ҳосил мекунем. Масъалаи канорӣ ҳосилшударо боз бо методи ивази тағйирёбандаҳо ҳал мекунем. Дар натиҷа масъалаҳои яктағйирёбанда доир ба киматҳои ҳос ва функсияҳои ҳос ҳосил мекунем. Ин масъалаҳои яктағйирёбандаро ҳал карда, киматҳои ҳос ва системаи функсияҳои ҳосро ҳосил мекунем, ки системаи пурра ва ортонормиридашуда дар фазои функсияҳои бифосила аз рӯи соҳаи маҳкам мебошад. Ҳалли масъала дар намуди қатори m -ченакаи мунтазам ва мутлақ наздикшаванда тартиб дода шуда ин қатор бо шартҳои додашуда ҳалли ягонаи классикии масъалаи барассишаванда мебошад.

Калидвожаҳо: муодилаи дифференциалӣ бо ҳосилаҳои хусусии дараҷаи дуум, ҳалли он дар шакли қатор, доимӣҳои дилҳо.

СМЕШАННО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

М. Гадозода, Ҳ.М. Ҳафизов

В статье рассматриваются дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка с переменными коэффициентами с начальными и краевыми условиями в ограниченной области. Для решения уравнения используется метод разделения переменных, и разделяющее решение представляется в виде произведения двух функций. Потом разделяя переменные, для одного из них получим однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера и для второй функции получим m -мерную краевую задачу. Полученную краевую задачу решаем ещё раз методом разделения переменных. В результате получим одномерные задачи про собственных значениях и систем собственных функций. Решая эти одномерные задачи, получим собственные значения и систему собственных функций, которая является полной системой и в пространстве непрерывных функций по ограниченной области. Решение задачи составлена в виде m -мерного монотонного и абсолютно сходящегося ряда, и этот ряд с данными условиями является единственным классическим решением рассматриваемой задачи.

Ключевая слова: дифференциальное уравнение с частными производными второй степени, решение в виде ряда, произвольные постоянные.

MIXED-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

M. Gadozoda, H.M. Hafizov

The article considers second-order partial differential equation with variable coefficients and initial and boundary conditions in a bounded domain. The method of separation of variables is used to solve the equation, and the separating solution is represented as a product of two functions. Then, by separating the variables, we obtain a homogeneous Euler-type differential equation for one of them, and a m -dimensional boundary value problem for the second function. We solve the resulting boundary value problem again using the method of separation of variables. As a result, we obtain one-dimensional problems for eigenvalues and systems of eigenfunctions. Solving these one-dimensional problems, we obtain eigenvalues and a system of eigenfunctions, which is a complete system in space of continuous on a bounded domain. The solution to the problem is presented in the form of a m -dimensional monotonic and absolutely convergent series, and this series with these condition is the only classical solution to the problem.

Keywords: partial differential equation of the second degree, solution in a form of the series, arbitrary constants.

Муқаддима

Ҳалҳои классикӣ ва сусти масъалаҳои омехтаи канорӣ барои муодилаҳои дифференциалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуум бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда тадқиқ карда шуда, дар қорҳои [2-8] нашр шудаанд. Дар мақола ҳалли классикии масъалаи омехтаи канорӣ барои як муодилаи дифференциалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуум бо усули Фуре тадқиқ гардида [1], ҳалли ягонаи классикии он дар намуди қатори m -ченакаи Фуре навишта шудааст.

Шарҳи масъала

Мавод аз омӯзиши муодилаи (1)

$$\left(t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{2n-1} = \sum_{j=1}^m \left(x_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right)^{2n-1}, \quad (1)$$

тадқиқ карда мешавад, ки дар ин ҷо $n \in N$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \bar{\Omega} = \{x_j : 1 < x_j \leq a_j, (j = \overline{1, m})\} \in R^m$; $u(t, \bar{x})$ -функсияи номаълум мебошад.

Муодилаи омӯхташавандаи (1), дар ҳолати додашавии функционалҳои дифференсиалии

$$L = t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, L_j = x_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, k = 2n - 1, n \in N, (j = \overline{1, m}),$$

ифодаи оператории [1]

$$(Lu)^k = \sum_{j=1}^m (L_j u)^k$$

аст.

Ба муодилаи шартҳои аввала ва канониро ҳамроҳ кунем

$$u(1, \bar{x}) = \varphi(\bar{x}); \frac{\partial u}{\partial t}(1, \bar{x}) = \psi(\bar{x}), \bar{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(t, \bar{x})|_{x_j=a_j} = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x_j}(t, \bar{x})|_{x_j=a_j} = 0; t \in [0, T], (j = \overline{1, m}), \end{cases} \quad (3)$$

мешавад, $\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x})$ – функсияҳои додашудаанд.

Ҳалли масъалаи (1)-(3)

Масъалаи (1)-(3)-ро бо усули ҷудокунии тағйирёбандаҳо [9-11]

$$u(t, \bar{x}) = T(t) \cdot X(\bar{x}) \quad (4)$$

тадқиқ намуда, барои $T(t)$ муодилаи дифференсиалии одии навъи Эйлер

$$t^2 T''(t) + \lambda T(t) = 0 \quad (5)$$

ва барои $X(\bar{x})$ -масъалаи

$$\sum_{j=1}^m \left(x_j^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x_j^2} \right)^{2n-1} + (\lambda X(\bar{x}))^{2n-1} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{cases} X(t; \bar{x})|_{x_j=a_j} = 0; \\ \frac{\partial X(t; \bar{x})}{\partial x_j}|_{x_j=a_j} = 0, (j = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (7)$$

ҳосил мекунем.

Ҳалли ин масъаларо, яъне (6)-(7)-ро низ бо усули Фуре дар намуди

$$X(\bar{x}) = \prod_{j=1}^m X_j(x_j) \quad (8)$$

тадқиқ намуда, масъалаҳои якченакаи навъи Штурма-Лиувилл

$$x_j^2 X_j''(x_j) + \mu_j X_j(x_j) = 0, (j = \overline{1, m}) \quad (9)$$

$$\begin{cases} X_j(1) = 0; \\ X_j'(a_j) = 0, (j = \overline{1, m}), \end{cases} \quad (10)$$

ҳосил мекунем, $\mu_j (j = \overline{1, m})$ -ададҳои ҷудокунии бо λ ба ёри муодилаи мувофиқоварӣ

$$\sum_{j=1}^m \mu_j^{2n-1} = \lambda^{2n-1}, \quad (11)$$

алоқаманданд.

1. Агар, $\mu_j > 0, (j = \overline{1, m})$ бошанд, ҳалҳои умумии (9) чунин:

$$X_j(\bar{x}_j) = \sqrt{x_j} \left\{ A_j \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu_j - 1}}{2} \ln x_j\right) + B_j \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu_j - 1}}{2} \ln x_j\right) \right\}$$

мебошанд. Аз ин ҷо $X_j(1) = A_j \cdot 1 + B_j \cdot 0 = 0, A_j = 0, B_j \neq 0, (j = \overline{1, m})$;

$$X'_j(a_j) = \frac{B_j}{2\sqrt{a_j}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu_j - 1}}{2} \ln a_j\right) + \frac{B_j \sqrt{4\mu_j - 1}}{2} \sqrt{a_j} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu_j - 1}}{2} \ln a_j\right) = 0, (j = \overline{1, m}), \quad B_j \neq 0; \quad a_j > 1;$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\sqrt{4\mu_j - 1}}{2} \ln a_j = -\sqrt{4\mu_j - 1}, (j = \overline{1, m}) \text{ мебошанд.}$$

$$\text{Ба воситаи } \frac{\sqrt{4\mu_j - 1}}{2} \ln a_j = \alpha_{k_j}, k_j \in N, (j = \overline{1, m}) \text{ - пайдарпайии ҳалҳои мусбати}$$

$$\text{муодилаи } \operatorname{tg} x_j = -\frac{2x_j}{\ln a_j}, (j = \overline{1, m}) \text{ ишора карда, ҳосил мекунем}$$

$$\mu_j = \left(\frac{\alpha_{k_j}}{\ln a_j} \right)^2 + \frac{1}{4}, k_j \in N, (j = \overline{1, m}) \quad (12)$$

қиматҳои хоси (9)-(10)-анд.

Барои (12) функцияҳои хоси мувофиқ

$$X_j(x_j) = \sqrt{x_j} \sin \frac{\alpha_{k_j}}{\ln a_j} \ln x_j, (j = \overline{1, m}) \quad (13)$$

мебошанд.

Аз (11) ва (12) меёбем:

$$\lambda_{k_1, k_2, \dots, k_m} = \sqrt[2n-1]{\left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\alpha_{k_j}}{\ln a_j} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]^{2n-1}} \quad (14)$$

ва барои ҳамин қимат, дар асоси (8) ва (13) функцияи хоси ортогоналии мувофиқ барои масъалаи (6)-(7)-ро бо вазни $\rho(\bar{x}) = \prod_{j=1}^m \rho_j(x_j) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{x_j^2}$ -ро дар намуди

$$X_{k_1, k_2, \dots, k_m}(\bar{x}) = \prod_{j=1}^m \sqrt{x_j} \sin \frac{\alpha_{k_j}}{\ln a_j} \ln x_j, k_j \in N. \quad (15)$$

$$\|X_{k_1, k_2, \dots, k_m}(\bar{x})\|^2 = \prod_{j=1}^m \int_0^{b_j} \rho_j(\bar{x}) \cdot X_j^2(x_j) dx_j = \prod_{j=1}^m \frac{4\alpha_{k_j}^2 \ln a_j + 2\ln^2 a_j + \ln^3 a_j}{2(4\alpha_{k_j}^2 + \ln^2 a_j)^2}$$

мебошад.

Барои (14) ҳалли умумии муодилаи (5)-ро менависем.

$$T_{k_1, k_2, \dots, k_m}(t) = \sqrt{t} \prod_{j=1}^m \left\{ A_{k_1, k_2, \dots, k_m} \cdot \cos \frac{\sqrt{4\lambda_{k_1, k_2, \dots, k_m} - 1}}{2} \ln t + B_{k_1, k_2, \dots, k_m} \cdot \sin \frac{\sqrt{4\lambda_{k_1, k_2, \dots, k_m} - 1}}{2} \ln t \right\}$$

$A_{k_1, k_2, \dots, k_m}, B_{k_1, k_2, \dots, k_m}$ - доимиҳои дилхоҳанд.

Барои ҳалли масъалаи асоси функцияи

$$u(t, \bar{x}) = \prod_{j=1}^m \sum_{k_j=1}^{\infty} X_{k_1, k_2, \dots, k_m}(\bar{x}) \sqrt{t} \left\{ A_{k_1, k_2, \dots, k_m} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda_{k_1, k_2, \dots, k_m}} - 1}{2} \ln t\right) + \right. \\ \left. + B_{k_1, k_2, \dots, k_m} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_{k_1, k_2, \dots, k_m}} - 1}{2} \ln t\right) \right\} \quad (16)$$

-ро месозем, ки $A_{k_1, k_2, \dots, k_m}$, $B_{k_1, k_2, \dots, k_m}$ -коэффитсиентҳои Фуре барои $\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x})$, $(i = \overline{1, 2})$ ҳангоми ҷудокунӣ аз рӯи (15) буда, бо ифодаҳои

$$A_{k_1, k_2, \dots, k_m} = \|X_{k_1, k_2, \dots, k_m}(\bar{x})\|^2 \prod_{j=1}^m \int_1^{a_j} X_{k_1, k_2, \dots, k_m}(\bar{x}) \varphi(\bar{x}) dx_j; \quad (17)$$

$$B_{k_1, k_2, \dots, k_m} = \|X_{k_1, k_2, \dots, k_m}(\bar{x})\|^2 \prod_{j=1}^m \int_1^{a_j} \frac{2\psi(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})}{x_j \sqrt{4\lambda_{k_1, k_2, \dots, k_m}} - 1} \cdot X_{k_1, k_2, \dots, k_m}(\bar{x}) dx_j; \quad (18)$$

навишта шудаанд.

Теорема. Агар $\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x}) \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ ҷой дошта бошад:

$$\varphi(1) = \varphi(a_j) = 0;$$

$$\psi'(1) = \psi'(a_j) = 0, (j = \overline{1, m}).$$

Он гоҳ, функсияи (16), бо коэффитсиентҳои (17)-(18) ҳалли ягонаи классикии масъалаи (1)-(3)-ро медиҳад.

Хулоса

Масъалаи омӯхташаванда муодилаи дифференциалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм мебошад, ки дар фазои $C(\overline{\Omega})$ бо методи Фуре тадқиқ шуда, ҳалли ягонаи масъала ба воситаи қатори Фуре пешниҳод мешавад.

Муқарриз: Солиев С.Қ.-н.и.ф.-м, дотсент, мудири кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференциалии ДМҶП.

Адабиёт

1. Юнуси М. Об одном классе модельных уравнений с экстремальным свойством. / М. Юнуси // Вестник ТНУ.-Душанбе, 2004, серия математика, № 1, С.128-135.
2. Гадозода М. О смешанной краевой задаче для одного модельного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. / М. Гадозода // Вестник технического университета. -2015. №2 (30). С.4-6.
3. Гадозода М. Об обобщенном решении смешанной задачи для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. / М. Гадозода // Вестник технического университета.-2015. №3(31). С.14-17.
4. Гадозода М. Смешанная краевая задача для модельного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. / М. Гадозода // Вестник ТНУ.- 2017. №1 (4).- С.26-28.
5. Гадозода М., Хафизов Х.М. Смешанная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. / М. Гадозода, Х.М. Хафизов // Вестник ТНУ. Серия: естественные науки. -2019. -№1. -С.79-83.
6. Гадозода, М. Масъалаи омехтаи канорӣ барои як муодилаи дифференсиалии моделӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби сеюм / М. Гадозода, Ҳ. М. Ҳафизов // Политехнический вестник. Серия: Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2021. – No. 3(55). – P. 5-9. – EDN XECMOK.
7. Гадозода, М. Начально-краевая задача для одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами / М. Гадозода, Х. М. Хафизов // Эпистемологические основания современного образования: актуальные вопросы продвижения фундаментального знания в учебный процесс : Материалы III Международной научно-практической конференции, Борисоглебск, 06–07 апреля 2023 года. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2023. – С. 23-28. – EDN BVUODI.
8. Гадозода, М. Дар бораи ҳалли умумикардашудаи масъалаи омехта барои як муодилаи дифференсиалии моделӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм / М. Гадозода, Ҳ. М. Ҳафизов // Паёми политехникӣ. Бахши: Интеллект, Инноватсия, инвеститсия. – 2024. – No. 4(68). – P. 8-11. – EDN GXUPKK.

9. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: «Наука» 1977, 736стр.
10. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. –М. «Наука» 1982, 296стр.
11. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. –М.: «Наука», -1973.,-296с.

**МАЪЛУМОТ ДАР БОРАИ МУАЛЛИФОН-СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ-INFORMATION
ABOUT AUTHORS**

TJ	RU	EN
Гадозода Мирзомурод	Гадозода Мирзомурод	Gadozoda Mirzomurod
н.и. ф.-м., дотсент	к. ф.-м.н., доцент	candidate of physical and mathematical sciences, associate professor
Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ	Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими	Tajik technical University named after academician M.S. Osimi
E-mail: gadozoda51@mail.ru ORCID id 0000-0002-0635-741		
TJ	RU	EN
Ҳафизов Ҳасан Маҷидович	Хафизов Хасан Маджидович	Hafizov Hasan Majidovich
н.и. ф.-м., дотсент	к. ф.-м.н., доцент	candidate of physical and mathematical sciences, associate professor
Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ	Таджикского технического университета имени академика М.С. Осими	Tajik technical University named after academician M.S. Osimi
E-mail: hafizov7171@mail.ru ORCID id 0000-0002-5931-2602		